

# 2022 年度大学院博士前期課程入学試験

## 大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報通信工学専攻

### 専門科目試験問題 (電気工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

#### 【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて19ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、①「制御工学」、②「電磁気工学」、③「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、及び、④「信号処理」、の全部で4分野(①~④)6題あり、この順番に綴じられている。この4分野(①~④)6題のなかから2分野以上3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【制御工学】解答は、白色（1番）の解答用紙に記入すること。

以下の問1～問3に答えよ。

問1 伝達関数  $P(s)$  が次式で表される線形時不変システム  $\Sigma$  について、以下の問いに答えよ。

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

- (i) このシステム  $\Sigma$  のステップ応答を時間  $t$  の関数 ( $t \geq 0$ ) として表せ。
- (ii)  $P(s)$  のボード線図におけるゲイン曲線の折れ線近似を考える。この折れ線近似において、ゲインのデシベル値が  $-60$  dB となるときの角周波数の値を求めよ。
- (iii) このシステム  $\Sigma$  に  $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$  ( $t \geq 0$ ) なる正弦波関数の入力を加えたとき、定常状態での出力は  $Y \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t + \phi\right)$  と表される正弦波関数となった。  $Y$  および  $\phi$  の値をそれぞれ求めよ。
- (iv) このシステム  $\Sigma$  に対して図1のようなフィードバックシステムを構成した。ただし、 $R(s)$ 、 $C(s)$  はそれぞれ時間  $t$  の関数  $r(t)$ 、 $c(t)$  ( $t \geq 0$ ) のラプラス変換を表し、 $k$  は正の実数値をとるパラメータである。  $R(s)$  から  $C(s)$  までのフィードバックシステムが安定となるための  $k$  に関する必要十分条件を求めよ。

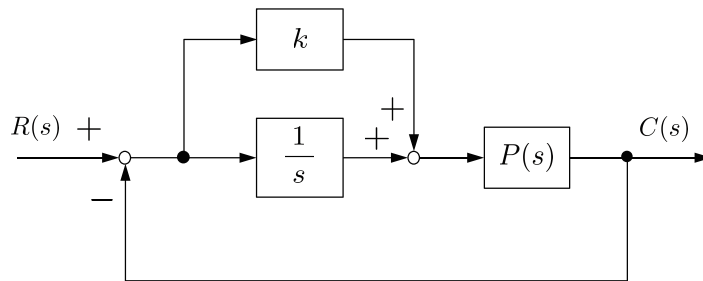


図 1

問2 次の状態方程式と出力方程式で表現される1入力1出力の線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  は状態変数ベクトル、 $u(t)$  は入力変数、 $y(t)$  は出力変数である。

(i) 係数行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

に対する行列指数関数  $e^{\mathbf{A}t}$  を求めよ。

(ii) 入力  $u(t) = e^{-2t}$  ( $t \geq 0$ ) を加えたときの出力  $y(t)$  ( $t \geq 0$ ) を  $t$  の関数として求めよ。ただし、時刻  $t = 0$  での初期状態を  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  とする。

(iii)  $k$  を任意の実数とする。  $u(t) = -ky(t)$  ( $t \geq 0$ ) なる出力フィードバック制御を施したフィードバックシステムの漸近安定性を判定せよ。ただし、その判定理由も述べること。

問3 次の状態方程式と出力方程式で表現される1入力1出力の線形時不変システムを考える。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  は状態変数ベクトル、 $u(t)$  は入力変数、 $y(t)$  は出力変数である。 $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$  とし、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t)$$

とおくとき、 $\mathbf{z}(t)$  を新たな状態変数ベクトルとした状態方程式

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t)$$

と出力方程式

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{z}(t)$$

における係数行列  $\tilde{\mathbf{A}}$  と係数ベクトル  $\tilde{\mathbf{b}}$ 、 $\tilde{\mathbf{c}}$  を求めよ。

# 専門用語の英訳

伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
ステップ応答	step response
ボード線図	Bode diagram
ゲイン曲線	log-magnitude curve
折れ線近似	piecewise linear approximation
ゲイン	gain
デシベル値	decibel value
角周波数	angular frequency
正弦波関数	sinusoidal function
入力	input
定常状態	steady state
出力	output
フィードバックシステム	feedback system
ラプラス変換	Laplace transform
安定	stable
必要十分条件	necessary and sufficient condition
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
状態変数ベクトル	state variable vector
入力変数	input variable
出力変数	output variable
係数行列	coefficient matrix
行列指数関数	matrix exponential function
出力フィードバック制御	output feedback control
漸近安定性	asymptotic stability
係数ベクトル	coefficient vector

**【電磁気工学】 解答は、黄色(2番)の解答用紙に記入すること。**

以下の文章を読んで文章中の(ア)~(ウ)に適切な文字式を、(エ)に適切な数式記号をそれぞれ記入せよ。また、問1~4にそれぞれ答えよ。

図のように、電子密度 $n_e$ が $x$ 方向にのみ依存した分布を持つプラズマがある。このプラズマ中を $x$ 正方向に伝搬する平面波の電磁波について考える。ここで、この電磁波の電場の大きさは $E_0 \exp\{i(kx - \omega t)\}$ と表すものとする。 $E_0$ は複素振幅、 $k$ は波数、 $\omega$ は角振動数、 $t$ は時間、 $i$ は虚数単位である。 $n_L$ 、 $n_H$ 、 $n_c$ はそれぞれ、プラズマの領域L ( $0 \leq x < x_d$ ) における電子密度、領域H ( $x \geq x_d$ ) における電子密度、臨界密度で、 $n_L \ll n_c < n_H$ の関係にあるものとする。プラズマは十分に希薄で、粒子間の衝突は無視できるものとする。また外部磁場、外部電場はないものとする。

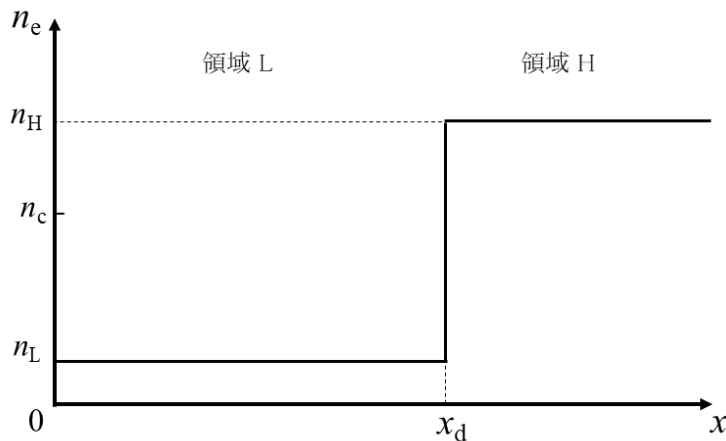


図. プラズマの電子密度分布.

まず、領域Lのプラズマ中を伝搬する電磁波を考える。電磁波の電場、磁束密度、誘起される電流の密度、真空中の誘電率、真空中の透磁率、真空中の光速をそれぞれ  $E$ 、 $B$ 、 $j$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $c$ とする。ただし、プラズマ中のイオンは、電子の質量 $m_e$ と比べ十分重く、静止しているものとする。領域Lにおけるこの電磁波の減衰は無いものとする。

Maxwell 方程式より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

であり、これら式(1)、式(2)とベクトル公式から、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3)$$

を得る。

① プラズマ振動を考えると、式(3)の  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$  の項は無視できる。 また、 $1/\epsilon_0 \mu_0 = c^2$  であるので式(3)は、

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} = \boxed{\text{ア}} \mathbf{j} \quad (4)$$

となる。

一方，電子の運動方程式は，

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = \boxed{\text{イ}} \quad (5)$$

で与えられる．ただし，電子の電荷量，および速度を  $q_e$ ,  $\mathbf{v}_e$  とし， $\mathbf{v}_e$  の大きさは  $c$  に比べて十分に小さく，相対論的な効果は無視できるものとする．

電磁波の振幅が十分小さい場合，運動方程式から電流密度は，

$$\mathbf{j} = n_e q_e \mathbf{v}_e = \boxed{\text{ウ}} \mathbf{E} \quad (6)$$

で与えられる．

プラズマ周波数を  $\omega_p = \sqrt{n_e q_e^2 / m_e \epsilon_0}$  とすると，式(4)および式(6)から ②プラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係，

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (7)$$

が得られる．

次に，領域 H のプラズマ中へ伝搬する電磁波を考える．その際，プラズマの電子密度  $n_e$  が ③臨界密度  $n_c$  を超える位置  $x = x_d$  より前方で電磁波は急激に減衰する．つまり，領域 H では  $\omega_p \boxed{\text{エ}} \omega$  の関係となっている．ここで ④電場の大きさが  $E_0$  の  $1/e$  倍まで減衰する，位置  $x_d$  からの距離  $\delta$  を表皮深さ という．ただし， $e$  は自然対数の底を意味する．

問 1 下線部①について，式(3)の  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$  の項が無視できる理由を簡潔に説明せよ．

問 2 下線部②について，式(4)および式(6)から式(7)を導出せよ．

問 3 下線部③のプラズマの臨界密度  $n_c$  を求めよ．

問 4 下線部④について，表皮深さ  $\delta$  を  $\omega$  と  $\omega_p$  を用いて表せ．

#### 専門用語の英訳

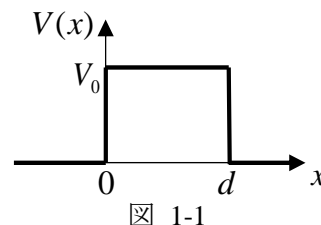
電磁波	electromagnetic wave
臨界密度	critical density
分散関係	dispersion relation
表皮深さ	skin depth

**【量子電子物性1】 解答は、桃色(1番)の解答用紙に記入すること.**

次の文章を読み、下記の問いに答えよ. ただし、プランク定数 $h$ を $2\pi$ で割った値を $\hbar$ , 虚数単位を $i$ とし、 $\times$ はスカラー倍を表すものとする.

図 1-1 および式(1)に示すようなポテンシャル $V(x)$ の一次元空間において (図 1-1),  $x$ が負の領域から正の領域へ進んでくるエネルギー $\varepsilon$ , 質量 $m$ の粒子について考える. ただし,  
 $V_0$ は正とする.

$$\begin{cases} V(x) = 0 & (\text{領域 1 : } x < 0) \\ V(x) = V_0 & (\text{領域 2 : } 0 \leq x \leq d) \\ V(x) = 0 & (\text{領域 3 : } d < x) \end{cases} \quad (1)$$



(a)  $\varepsilon < V_0$  のとき

領域 1~3 における定常状態の波動関数をそれぞれ $\varphi_{1a}(x)$ ,  $\varphi_{2a}(x)$ ,  $\varphi_{3a}(x)$ とすると, これらの波動関数はエネルギー $\varepsilon$ を持った粒子の波数 $k$  ( $k > 0$ ), または実数 $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) を使ってそれぞれ次の式で表すことができる.

$$\varphi_{1a}(x) = A \times [ \quad \text{①} \quad ] + B \times [ \quad \text{②} \quad ] \quad (2)$$

$$\varphi_{2a}(x) = C \exp(\alpha x) + D \exp(-\alpha x) \quad (3)$$

$$\varphi_{3a}(x) = F \times [ \quad \text{①} \quad ] \quad (4)$$

ここで  $A, B, C, D, F$  は一般に複素定数である. また $k$  ( $k > 0$ ) および $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) の値はシュレーディンガー方程式を解くことにより $k = [ \quad \text{③} \quad ]$ ,  $\alpha = [ \quad \text{④} \quad ]$  と求まる.

一方, ある粒子の波動関数を $\Psi(x)$ とするとき, その波動関数の 2 乗 (複素共役を取ったものとの積) に $dx$ をかけた $|\Psi(x)|^2 dx = \Psi^*(x)\Psi(x)dx$ は微小領域 $dx$ においてその粒子を見出す確率を表しており, この $\Psi^*(x)\Psi(x)$ のことを確率密度という. またこのときの確率の流れの密度 $S(\Psi)$ は運動量演算子 $\hat{p}$  を使って次の式で定義される.

$$S(\Psi) = \frac{\Psi^*(x)\hat{p}\Psi(x) + \Psi(x)\hat{p}^*\Psi^*(x)}{2m} \quad (5)$$

運動量演算子は $\hat{p} = [ \quad \text{⑤} \quad ]$  と記述できるので,  $x$ が負の領域からポテンシャル障壁に向かって進んでくる粒子, ポテンシャル障壁で反射される粒子, およびポテンシャル障壁を透過する粒子の波動関数をそれぞれ $\Psi_i(x)$ ,  $\Psi_r(x)$ ,  $\Psi_t(x)$ とすると, これら確率の流れの密度は $A, B$ または $F$ などを用いて次の式で与えられる.

$$S(\Psi_i) = [ \quad \text{⑥} \quad ], S(\Psi_r) = [ \quad \text{⑦} \quad ], S(\Psi_t) = [ \quad \text{⑧} \quad ] \quad (6)$$

この式(6)を用いると, 粒子が領域 2 のポテンシャルの障壁を透過する確率 (透過率)  $T_a$  および障壁で反射される確率 (反射率)  $R_a$  を次のように求めることができる.

$$T_a = [ \quad \textcircled{9} \quad ], R_a = [ \quad \textcircled{10} \quad ] \quad (7)$$

さらに波動関数の境界条件を考慮して、 $\alpha$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$ ,  $V_0$ を使って表すと次のようになる。

$$T_a = \left( 1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\alpha d)}{4\varepsilon(V_0 - \varepsilon)} \right)^{-1}, R_a = [ \quad \textcircled{11} \quad ] \quad (8)$$

ここで  $\sinh(\alpha d) = \frac{\exp(\alpha d) - \exp(-\alpha d)}{2}$  の関係を用いた。

このように粒子のエネルギー $\varepsilon$ がポテンシャル障壁の高さ $V_0$ より小さい場合、古典力学においては粒子がポテンシャル障壁を透過する確率はゼロであるが、量子力学においてはゼロではなく有限の値をとる。このように粒子が透過する現象をトンネル効果という。またポテンシャル障壁が高く $\alpha d \gg 1$ と近似できる場合には、

$$T_a \cong [ \quad \textcircled{12} \quad ] \times \exp(-2\alpha d) \quad (9)$$

と表すことができ、この式から<sub>[下線]</sub>透過率 $T_a$ の値は $d$ と $\alpha$ に非常に敏感であることがわかる。

(b)  $\varepsilon > V_0$ のとき

領域1~3における定常状態の波動関数をそれぞれ $\varphi_{1b}(x)$ ,  $\varphi_{2b}(x)$ ,  $\varphi_{3b}(x)$ とすると、領域2における波動関数は実数 $\beta = [ \quad \textcircled{13} \quad ]$  ( $\beta > 0$ ) を使って次の式で表すことができる。

$$\varphi_{2b}(x) = C' \exp(i\beta x) + D' \exp(-i\beta x) \quad (10)$$

ただし、 $C'$ ,  $D'$ は複素定数である。また領域1および領域3におけるそれぞれの波動関数 $\varphi_{1b}(x)$ ,  $\varphi_{3b}(x)$ の関数形は $\varepsilon < V_0$ の場合と同じであることから、 $\varepsilon > V_0$ のときの粒子のポテンシャル障壁の透過率 $T_b$ は $m$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$ ,  $V_0$ を使って $T_b = [ \quad \textcircled{14} \quad ]$ と表すことができる。

この結果は、粒子のエネルギー $\varepsilon$ がポテンシャル障壁の高さ $V_0$ より大きい場合でも $T_b$ は必ずしも1ではないことを示している。また、 $T_b$ が1となるのは $\varepsilon$ が自然数 $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を使って次式で表されるときである。

$$\varepsilon = [ \quad \textcircled{15} \quad ] \quad (11)$$

(c)  $\varepsilon = V_0$ のとき

領域2における波動関数は解析的に求めることはできないが、 $\varepsilon = V_0$ のときの透過率 $T_c$ は $T_a$ および $T_b$ の $\varepsilon \rightarrow V_0$ の極限值として求めることができる。このときの極限值は両者で同じ値となり、 $T_c$ は次の式で与えられる。

$$T_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow V_0} T_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow V_0} T_b = [ \quad \textcircled{16} \quad ] \quad (12)$$

問1 文章中の空欄 [  $\textcircled{1}$  ] ~ [  $\textcircled{16}$  ] の中に適切な数式を入れよ。



問2 式(9)の $2\alpha$ の逆数は減衰長とよばれる。  $V_0 = 2.0 \text{ eV}$ ,  $\varepsilon = 1.2 \text{ eV}$ のとき, この減衰長を単位も含めて有効数字2桁で求めよ。ただし,  $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $m = 9.0 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする。

問3 文章中の下線部において $\alpha$ が  $10 \text{ nm}^{-1}$ の場合,  $d$ が  $0.10 \text{ nm}$  増加したときの透過率は元の透過率の何%になるか。有効数字2桁で求めよ。なお, 自然対数の底を  $2.7$  とし,  $(2.7)^2=7.3$  とする。

## 量子電子物性1 単語の英訳

プランク定数 :	Planck constant
ポテンシャル :	potential
波動関数 :	wave function
波数 :	wave number
複素定数 :	complex constant
シュレーディンガー方程式 :	Schrödinger equation
複素共役 :	complex conjugate
確率の流れの密度 :	probability current density
運動量演算子 :	momentum operator
障壁 :	barrier
透過率 :	transmittance
反射率 :	reflectance
古典力学 :	classical mechanics
有限の値 :	finite value
トンネル効果 :	tunneling effect
極限值 :	limit value
減衰長 :	attenuation length
素電荷 :	elementary charge

**【量子電子物性2】 解答は、緑色(2番)の解答用紙に記入すること。**

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、素電荷を $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とし、 $\times$ はスカラー倍を表すものとする。

図 2-1 に示すような厚さ $d$ 、幅 $w$ 、長さ $l$ の直方体形状の[下線1]不純物をドーピングした半導体結晶試料 A を考える。この試料のキャリアは伝導電子（以下、電子）のみで、電子密度 $n$ で一様に分布しているものとする。電圧 $V$ （ただし $V > 0$ ）によって弱い電界 $\mathbf{E}$ がこの半導体中に作用している場合、結晶中の電子は電界による力 $\mathbf{F} = [ \quad \textcircled{1} \quad ]$ を受けて

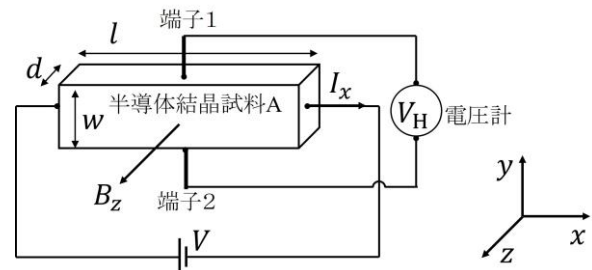


図 2-1

加速される。しかし、[下線2]加速された電子は種々の散乱体と衝突して運動量を失い、定常状態では平均速度 $\mathbf{v}$ で運動していると見なすことができる。この運動は[  $\textcircled{7}$  ]運動とよばれる。電子の有効質量を $m^*$ 、衝突の緩和時間を $\tau$ とすると、 $\mathbf{v}$ は $m^*$ 、 $\tau$ を用いて $\mathbf{v} = [ \quad \textcircled{2} \quad ] \times \mathbf{E}$ と表される。この[  $\textcircled{2}$  ]の絶対値は[  $\textcircled{7}$  ]移動度 $\mu$ とよばれる。

いま、試料にかかる電界 $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ により電子は平均速度 $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ で移動し、電流 $\mathbf{I} = (I_x, 0, 0)$ が流れるとする。この $I_x$ は $v_x$ を用いて、 $I_x = [ \quad \textcircled{3} \quad ] \times v_x$ と表される。ここから試料の導電率 $\sigma$ は $\mu$ を用いて $\sigma = [ \quad \textcircled{4} \quad ]$ と導かれる。

次に、この電流が流れている状態で試料の $+z$ 方向に磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ （ただし $B_z > 0$ ）の磁界を印加する。[  $\textcircled{7}$  ]運動する電子は磁界から[  $\textcircled{1}$  ]力を受けた結果、試料の[  $\textcircled{7}$   $(+y \cdot -y)$  ]側に偏って分布し、逆側にはイオン化した[  $\textcircled{5}$  (ドナー・アクセプタ)]が残される。この結果、 $y$ 軸に沿った電界成分が生じ、この電界によって試料の端子 1-2 間には起電力 $V_H$ （ただし、端子 2 の電位を基準とする）が発生する。この効果はホール効果とよばれ、[下線3]半導体の物性評価手段として、また[下線4]センサを始めとする様々な電子素子において重要である。定常状態では[  $\textcircled{1}$  ]力と $y$ 方向の電界成分による力が釣りあうので、導電率 $\sigma$ は磁界を印加しない場合と等しくなる。このとき $V_H$ は $B_z$ と $I_x$ の関数として $V_H = [ \quad \textcircled{5} \quad ] \times B_z I_x$ と表される。また、[  $\textcircled{5}$  ]に試料厚さ $d$ を掛けたものはホール係数 $R_H$ とよばれ、 $\sigma$ に $R_H$ の絶対値を掛けたものはホール移動度 $\mu_H$ とよばれる。キャリアの速度分布を考慮して解析すると、通常、このホール移動度は[  $\textcircled{7}$  ]移動度 $\mu$ よりも[  $\textcircled{4}$  (大きく・小さく)]なることが知られている。

問1 文章中の空欄 [ ㉞ ] ~ [ ㉟ ] にあてはまる語句を答えよ。  
 ただし空欄 [ ㉟ ] [ ㊱ ] [ ㊲ ] には適切な語句を一つ選ぶこと。

問2 文章中の空欄 [ ① ] ~ [ ⑤ ] にあてはまる数式を答えよ。

問3 文章中の下線 1 について、半導体結晶試料 A が Ge や Si のような 14 族元素半導体である場合、伝導電子を供給する不純物として適切な元素を以下の選択肢からすべて選べ。

[ B, As, P, C ]

問4 文章中の下線 2 の電子の散乱について考える。図 2-2 中の曲線 a は比較的高濃度のドーパントを含む n 型半導体における電子移動度  $\mu$  の温度依存性の概形を示したものである。絶対温度を  $T$  とするとき、 $\mu$  は低温領域において  $T^{3/2}$ 、高温領域において  $T^{-3/2}$  に比例して変化した。このとき、低温領域、高温領域それぞれにおける支配的な散乱機構が何であるかを説明せよ。また、図 2-2 を曲線 a も含めて解答用紙に転記し、同種の半導体でドーパント濃度が曲線 a で示す試料に比べて十分に低い場合の電子移動度の温度依存性の概形を曲線 a との相対的な位置関係を明確にして描け。

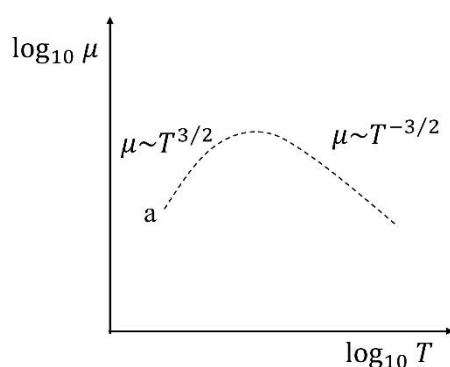


図 2-2

問5 文章中の下線 3 について、一般的にはホール効果測定により不純物半導体の主たるキャリアの種類が電子か正孔かを判別することができる。キャリア種が電子の場合、正孔の場合それぞれについてどのように判別するか具体的に答えよ。

問6 文章中の下線 4 について、ホール効果を利用して磁界を計測するセンサとしてホール素子がある。以下の問いに答えよ。

(i) 電子密度  $n = 1 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 、 $d = 0.1 \text{ mm}$ 、 $w = 0.5 \text{ mm}$ 、 $l = 2 \text{ mm}$  の半導体結晶試料 A に電流  $I_x = 1 \text{ mA}$  を流した場合、図 2-1 の配置で  $z$  方向にある磁束密度の磁界を印加しながら起電力

$V_H$ を計測すると $V_H = -1.25 \text{ mV}$ であった。このときの磁束密度の大きさを有効数字1桁で単位も含めて解答せよ。導出過程も示すこと。

- (ii) ホール素子を定電圧駆動させる場合、表 2-1 に挙げた3つの半導体の中から、ホール素子材料としての最も磁界感度が高くなるものを選択しその理由とともに答えよ。

表 2-1

半導体	電子移動度 ( $\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ )	バンドギャップ (eV)
Si	1450	1.12
GaAs	9200	1.42
InSb	77000	0.17

## 量子電子物性2 単語の英訳

半導体 :	semiconductor
直方体 :	rectangular
不純物 :	impurity
ドーピング :	doping
キャリア :	carrier
伝導電子 :	conduction electron
電子密度 :	electron density
電界 :	electric field
散乱体 :	scatterer
運動量 :	momentum
定常状態 :	steady state
有効質量 :	effective mass
緩和時間 :	relaxation time
移動度 :	mobility
導電率 :	conductivity
磁束密度 :	magnetic flux density
磁界 :	magnetic field
起電力 :	electromotive force
ホール効果 :	Hall effect
ドーパント :	dopant
散乱機構 :	scattering mechanism
ホール素子 :	Hall element
定電圧駆動 :	constant-voltage drive
感度 :	sensitivity

**【量子電子物性3】 解答は、灰色(3番)の解答用紙に記入すること.**

物質の誘電的性質に関する下記の問いに答えよ. ただし, 素電荷を $e$ , 真空の誘電率を $\epsilon_0$ , プランク定数を $2\pi$ で割ったものを $\hbar$ , 虚数単位を $i$ , 時間を $t$ とし,  $x$ はスカラー倍を表すものとする.

媒質に外部から電界を印加すると, 電子や原子の変位, あるいは永久双極子モーメントをもつ分子の再配向に伴った分極が生じる. 電子分極の性質を考える簡単なモデルとして, まず $+e$ の正電荷をもった原子核のまわりに $-e$ の負電荷をもつ電子が雲のように分布して存在し, 電界による電子の1次元的な変位によって分極が誘起される系を考える. 以下では振幅 $E_0$ , 角周波数 $\omega$ の交流電界 $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ が媒質の $x$ 方向に一樣に印加されるものとし, 簡単のため, 電子に作用する局所電界と外部電界は等しいものとする.

電界によって電子の中心が元の位置から $x$ だけ変位するとき, 電子は復元力 $-k_e x$ に加え, 制動力 $-\gamma \times dx/dt$ を感じる. 電子の質量を $m$ として $k_e = m\omega_0^2$ ,  $\gamma = m\Gamma$ とおき, 電界に対する電子の変位方向に注意すると, 以下の運動方程式が得られる.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = -eE_0 \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

式(1)の解として $x = x_0 \exp(-i\omega t)$ の応答を仮定すると, 振幅 $x_0$ が次のように求まる.

$$x_0 = - [ \quad \textcircled{1} \quad ] - i [ \quad \textcircled{2} \quad ] \quad (2)$$

電子分極率 $\alpha_e$ は電子の変位が誘起する双極子モーメントの大きさを表す. 式(2)の与える $\alpha_e$ は次のようになる.

$$\alpha_e = [ \quad \textcircled{3} \quad ] + i [ \quad \textcircled{4} \quad ] \quad (3)$$

電子の密度を $n$ とすると, 生じる分極 $P$ は $\alpha_e$ を用いて $P = [ \quad \textcircled{5} \quad ]$ と表される.

続いて, 上と同様の議論を原子核(ポテンシャル)の影響を受けない自由電子に適用することで, 伝導電子の応答が支配的な金属や高ドープ半導体の誘電応答をモデル化する. 以下では単一の自由電子を考えるが, これまでと同じく電子の質量, 変位, 分極率, 媒質中の密度はそれぞれ $m$ ,  $x$ ,  $\alpha_e$ ,  $n$ で表し, 印加される交流電界は $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ で表わすものとする. 自由電子に対しては復元力は働かず, 制動力に関するパラメータ $\Gamma$ は自由電子の緩和時間 $\tau$ を使って $\Gamma = 1/\tau$ と表せる. このことから, 自由電子の従う運動方程式は $\tau$ を使って次式で与えられる.

$$[ \quad \textcircled{6} \quad ] = -eE_0 \exp(-i\omega t) \quad (4)$$

式(4)の解として $x = x_0 \exp(-i\omega t)$ の応答を仮定すると, 変位の振幅および分極率は次のように求まる.

$$x_0 = [ \quad \textcircled{7} \quad ] - i [ \quad \textcircled{8} \quad ] \quad (5)$$

$$\alpha_e = - [ \quad \textcircled{9} \quad ] + i [ \quad \textcircled{10} \quad ] \quad (6)$$

次に, 分極応答から比誘電率 $\epsilon_r(\omega)$ を求めることを考える. いま検討している系では, 電束密度 $D$ と分

極  $P$  の間には  $D = [ \quad \text{⑪} \quad ]$  の関係が成り立つ。また、比誘電率の定義から  $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$  であることを考慮すると、 $\epsilon_r(\omega)$  が次のように求まる。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i \frac{1}{\omega\tau}} \quad (7)$$

式(7)の  $\omega_p$  はプラズマ周波数と呼ばれ、自由電子の性質を決める重要なパラメータである。特に、 $\omega\tau \gg 1$  が成り立つような電界（通常、電磁波として存在）が媒質に入射した場合には、 $\omega < \omega_p$  において  $\epsilon_r(\omega)$  の実部と虚部の値がそれぞれ [  $\quad \text{⑫} \quad$  (正・負) ] および [  $\quad \text{⑬} \quad$  (正・負) ] となる。この効果によって銀、アルミニウムなどの金属は可視光を反射する。

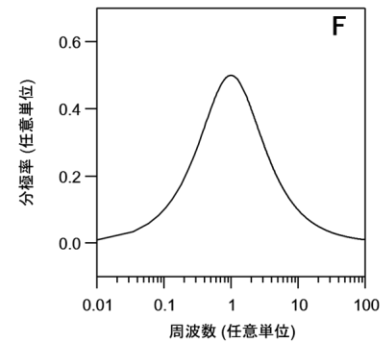
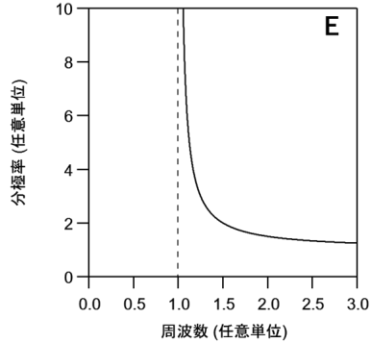
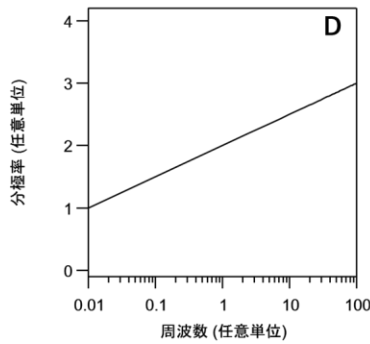
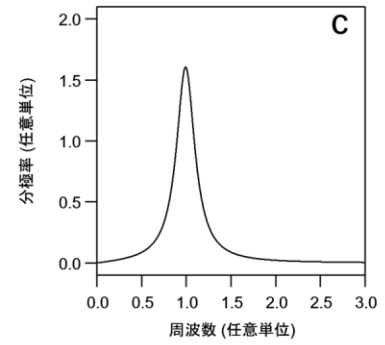
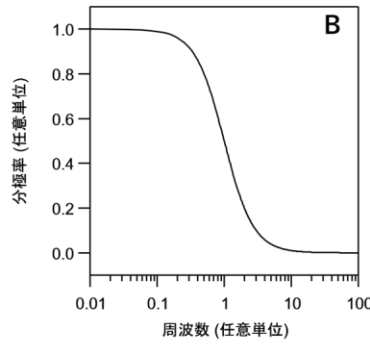
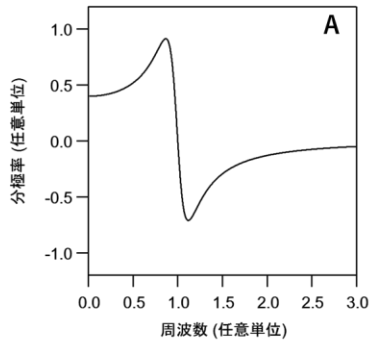
問1 文章中の空欄 [  $\quad \text{①} \quad$  ] ~ [  $\quad \text{⑪} \quad$  ] にあてはまる数式を答えよ。なお、  
[  $\quad \text{⑥} \quad$  ] ~ [  $\quad \text{⑩} \quad$  ] は  $\tau$  を使うこととする。また、[  $\quad \text{⑫} \quad$  ] および  
[  $\quad \text{⑬} \quad$  ] は適切な語句を選ぶこと。

問2 誘電体の分極応答について下記の問いに答えよ。

(i) 実際の誘電体では外部電界と局所電界の大きさは異なる。立方晶の単結晶において、局所電界に寄与する電界の成分を2つ、それぞれ50字以内で説明し、それぞれの成分が局所電界を大きくするように働くか、小さくするように働くか答えよ。

(ii) 本文で論じた電子分極以外の分極機構にイオン分極および配向分極がある。これら2つの機構に基づく分極率の実部と虚部のそれぞれ（合計4成分）について、周波数依存性の概形を正しく表しているものを以下の図より選び、記号で答えよ。なお、グラフの破線は漸近線を表す。





問3 自由電子の誘電応答について下記の問いに答えよ.

(i)  $\omega_p$  を  $m$ ,  $e$ ,  $n$ ,  $\epsilon_0$  を用いて数式で表せ.

(ii) 表示素子や太陽電池などのデバイスでは導電性をもちながら可視光を透過する透明導電体を用いられている. これらは  $\omega_p$  の値を調節することで実現されるが, 本文で論じたモデルによれば, 無色かつ透明な導電体を実現できるものは以下の4つのうちどれか, 該当するものをすべて答えよ.

(ア)  $\hbar\omega_p = 10.0 \text{ eV}$     (イ)  $\hbar\omega_p = 5.0 \text{ eV}$     (ウ)  $\hbar\omega_p = 1.0 \text{ eV}$     (エ)  $\hbar\omega_p = 0.5 \text{ eV}$

### 量子電子物性3 単語の英訳

誘電的性質：	dielectric properties
素電荷:	elementary charge
誘電率：	permittivity
永久双極子モーメント：	permanent dipole moment
分極：	polarization
局所電界：	local electric field
復元力：	restoration force
制動力：	damping force
自由電子：	free electron
緩和時間：	relaxation time
電束密度：	electrical flux density
プラズマ周波数：	plasma frequency
立方晶の結晶：	cubic crystal
配向分極：	orientational polarization
周波数依存性：	frequency dependence
透明導電体：	transparent conductor

【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

1. 連続時間信号

$$x(t) = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t - mT) \quad \text{ただし} \quad p(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < T) \\ 0 & (t < 0 \text{ または } T \leq t) \end{cases}$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 $t$  は連続的な時刻を表す実数であり、 $m$  は任意の整数である。また、 $T$  は  $t$ ,  $m$  に依存しない定数であり、正の実数とする。

(i)  $x(t)$  が周期信号であることを示し、その基本周期を求めよ。

(ii)  $x(t)$  を図示せよ。

(iii)  $x(t)$  をフーリエ級数に展開せよ。ただし、 $a, b, c$  を定数とする次の関係式

$$\int_a^b c^2 t e^{ct} dt = \left[ (ct - 1) e^{ct} \right]_a^b$$

を利用して良い。

(iv) エイリアシングを生じないように  $x(t)$  をサンプリングしたい。それが可能であるならばサンプリング周波数をどのように設定すればよいかを、不可能であるならばその理由を、問い (iii) の結果に基づいて論ぜよ。

2. 入出力差分方程式

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{6}y[n-2] + \frac{1}{3}y[n-4] - x[n-5]$$

で表される因果的な離散時間信号処理システム  $L$  について、以下の問いに答えよ。ただし、 $n$  は離散的な時刻を表す整数であり、 $x[n]$ ,  $y[n]$  はそれぞれ  $L$  に対する入力信号、出力信号を表す。

(i)  $z$  変換により定義される  $L$  の伝達関数を  $H(z)$  とする。  $H(z)$  を求めよ。

(ii) 問い (i) の  $H(z)$  について、その極と零点を求め、図示せよ。

(iii)  $L$  の有界入力有界出力安定性を論ぜよ。

(iv)  $L$  への入力  $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$  に対し、出力が任意の  $n$  について  $y[n] = 0$  となるような  $\Omega_0$  を全て求めよ。ただし、 $\Omega_0$  は  $n$  に依存しない定数であり、 $0 \leq \Omega_0 < \pi$  を満たす。

---

専門用語の英訳

---

連続時間信号	continuous-time signal
周期信号	periodic signal
基本周期	fundamental period
フーリエ級数	Fourier series
エイリアシング	aliasing
サンプリング	sampling
サンプリング周波数	sampling frequency
入出力差分方程式	input-output difference equation
因果的	causal
離散時間信号処理システム	discrete-time signal processing system
入力信号	input signal
出力信号	output signal
$z$ 変換	$z$ transform
伝達関数	transfer function
極	pole
零点	zero
有界入力有界出力安定性	bounded-input bounded-output stability

---